EXERCICES TYPE DEVOIRS

Devoir de Synthèse II

EXERCICE N°1 — 3 points — 25'

Dans le tableau ci-dessous, à chaque question une seule des réponses proposées est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, sans justification, la réponse qui lui correspond.

N°	Question	Réponses		
		a	b	c
1	Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a: $\ln(x^2)=$	$2ln(x)$	$(\ln x)^2$	$2ln\lvert x\rvert$
2	La valeur moyenne de la fonction: $x\mapsto\frac{1}{x}$ sur $[1;\sqrt{e}]$ est:	$\frac{1}{2(\sqrt{e}-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{e}-1}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
3	Le réel $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3-\tan x)dx=$	0	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-2$	2

EXERCICE N°2 — 5 points — 40'

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(0;0;1)$; $B(1;1;1)$ et $C(-1;0;-1)$.

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}$.

b) En déduire qu'une équation du plan $\mathcal{P}=(ABC)$ est : $2x-2y-z+1=0$ P=(ABC) .

2. Soit $D(1;-2;1)$.

a) Montrer que ABCD est un tétraèdre.

b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ABCD.

c) En déduire la distance du point D au plan $\mathcal{P}$.

3. Soit $S=\{M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0\}$.

a) Montrer que S est une sphère de centre D dont-on déterminera le rayon.

b) Montrer que $\mathcal{P}$ coupe S suivant un cercle $\mathcal{C}$ dont-on précisera le centre H et le rayon r.

4. Soit Δ la droite passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b) Calculer la distance du point D à la droite Δ.

c) Montrer que la droite Δ coupe S en deux points.

EXERCICE N°3 — 7 points — 45'

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

: 23390248 - 29862267

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

1. a) Soit f la fonction définie sur [0,1] par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. En déduire u_0 .

b) Calculer u_1 .

2. a) On pose $I=\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$. Vérifier que : $u_0+u_2=I$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $u_2=\sqrt{2}-I$.

c) En déduire u_2 .

3. a) x étant un élément de l'intervalle [0,1], encadrer $\sqrt{1+x^2}$.

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$; on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\le u_n \le \frac{1}{n+1}$

c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3, on pose $I_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$

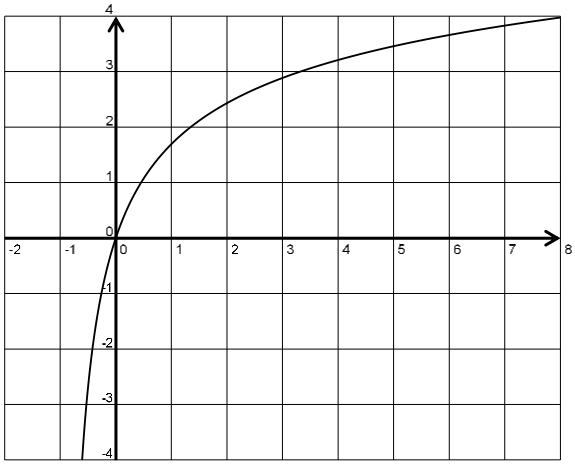
a) Vérifier que : $u_n+u_{n-2}=I_n$.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur I_n, montrer que : $nu_n+(n-1)u_{n-2}=\sqrt{2}$

c) Calculer alors l'intégrale : $K=\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}dx$

EXERCICE N°4 — 6 points — 50'

A – Le graphique ci-contre représente la courbe représentative de la fonction: $g: x\mapsto \ln(1+x)+\frac{2x}{x+1}$



Déterminer, par lecture graphique, le signe de $g(x)$.

B – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=x\ln(x^2+1)$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que pour tout : $\forall x\in\mathbb{R}$; on a: $f'(x)=g(x^2)$.

b) Etudier la parité de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

d) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite $\Delta : y = x$.

e) Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ. (sur l'annexe)

2. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer, dans le même repère, la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1}.

3. a) Vérifier que pour tout réel *x*, on a: $\dfrac{x^3}{x^2+1} = x - \dfrac{x}{x^2+1}$

b) Calculer : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e-1}} x \ln\left(x^2+1\right) dx$

c) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations: $x = \sqrt{e-1}$ et $x = -\sqrt{e-1}$. Hachurée cette partie du plan sur le graphique.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com